PART3 関数の近似式

要点整理と公式

要点 ① 1 次の近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，

微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

よって，h が 0 に十分近い値のときは

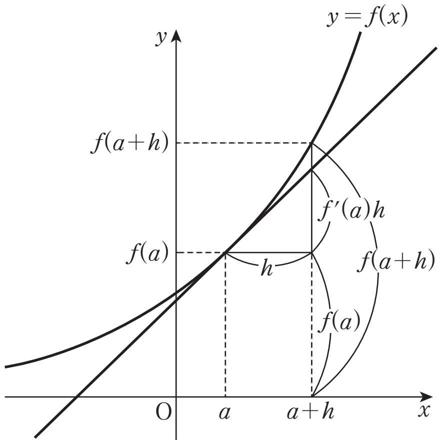
$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

であるから

$$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq f'(a)h$$

つまり

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$



と表すことができる。これは，$f(a+h)$ の値が h の 1 次式で近似されることを表す。

1 次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

(ex) $h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式

$(\sin x)'=\cos x$ より

$h\fallingdotseq 0$ のとき　$\sin(a+h)\fallingdotseq$ 　　$+$ 　　　$=\sin a+h\cos a$

1 次の近似式 $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$ において，$a=0$，$h=x$ とすると，次の近似式が得られる。

$x\fallingdotseq 0$ のときの 1 次の近似式

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

(ex) $x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)=(1+x)^p$（p は実数）の 1 次の近似式

$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$ であり，$f(0)=1$，$f'(0)=p$ であるから

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$

[MEMO]

3 (1) $h \fallingdotseq 0$ のとき，$\cos(a+h)$ の 1 次の近似式をつくり，$\cos 46^\circ$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。ただし，$\pi = 3.142$，$\sqrt{2} = 1.414$ とする。

(2) 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

(i) $\dfrac{1}{0.998^2}$ (ii) $\sqrt[3]{346}$

Point Pickup

1 次の近似式

$h \fallingdotseq 0$ のとき $f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

とくに $x \fallingdotseq 0$ のとき $(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

第14講　PART3 確認問題

1　$h \fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式をつくり，

$\sin 61^\circ$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

ただし，$\sqrt{3}=1.732$，$\dfrac{\pi}{180}=0.0174$ とする。

［ア］，［イ］は下の①～④のうちから選べ。

1 次の近似式　［ア］

$\sin 61^\circ$ の近似値　［イ］

[［ア］の選択肢]

① $\sin a+h\cos a$　② $\sin a-h\cos a$

③ $\cos a+h\sin a$　④ $\cos a-h\sin a$

[［イ］の選択肢]

① 0.724　② 0.785

③ 0.825　④ 0.875

2　1 次の近似式を用いて，1.002^5 の近似値を求める。

$f(x)=(1+x)^5$ とおくと，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}x$$

したがって，1.002^5 の近似値を小数第 2 位まで求めると

［オ］である。

［オ］は下の①～④のうちから選べ。

① 1.01　② 1.02

③ 1.03　④ 1.04

3 1 次の近似式を用いて，$\sqrt[3]{128}$ の近似値を求める。

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \boxed{\text{カ}} + \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}x$$

したがって，$\sqrt[3]{128}$ の近似値を小数第 2 位まで求めると

$\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ は下の①～④のうちから選べ。

① 5.03　　② 5.04

③ 5.05　　④ 5.06

[MEMO]

PART3 関数の近似式

3　(1)　$h \fallingdotseq 0$ のとき，$\cos(a+h)$ の1次の近似式をつくり，$\cos 46^\circ$ の近似値を小数第3位まで求めよ。ただし，$\pi=3.142$，$\sqrt{2}=1.414$ とする。

(2)　1次の近似式を用いて，次の数の近似値を小数第3位まで求めよ。

(i)　$\dfrac{1}{0.998^2}$　　(ii)　$\sqrt[3]{346}$

[解答]

(1)　$(\cos x)'=-\sin x$ より

$h \fallingdotseq 0$ のとき　$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a+(-\sin a)h=\cos a-h\sin a$

$46^\circ=45^\circ+1^\circ=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}$ より

$$\cos 46^\circ=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq \cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0.6946\cdots\cdots \fallingdotseq 0.695$$

(2)(i)　$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}$

$f(0)=1$，$f'(0)=-2$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{1}{(1+x)^2} \fallingdotseq 1-2x$

したがって $\dfrac{1}{0.998^2}=\dfrac{1}{(1-0.002)^2} \fallingdotseq 1-2\cdot(-0.002)=1.004$

(ii)　$\sqrt[3]{346}=\sqrt[3]{343+3}=\sqrt[3]{7^3\left(1+\dfrac{3}{7^3}\right)}=7\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{7^3}}$

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{3}$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき $\sqrt[3]{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}x$

したがって

$$\sqrt[3]{346}=7\sqrt[3]{1+\frac{3}{7^3}} \fallingdotseq 7\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7^3}\right)=7+\frac{1}{7^2}=\frac{344}{49}=7.0204\cdots\cdots \fallingdotseq 7.020$$

第14講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：④

[解説]

$$(\sin x)' = \cos x$$

$h \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + \cos a \cdot h \quad \text{[A]}$$
$$= \boldsymbol{\sin a + h\cos a}$$

$61^\circ = 60^\circ + 1^\circ = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{180}$ より，[B]

$$\sin 61^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$
$$\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(1.732 + 0.0174)$$
$$= 0.8747 \fallingdotseq \mathbf{0.875}$$

[A] 1 次の近似式
$h \fallingdotseq 0$ のとき，
$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$

[B] $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$（ラジアン）

2 **[正解]** ウ：1，エ：5，オ：①

[解説]

$f(x) = (1+x)^5$ とおくと，

$$f'(x) = 5(1+x)^4$$
$$f(0) = 1,\quad f'(0) = 5$$

よって，$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x) \fallingdotseq \boldsymbol{1+5x} \quad \text{[C]}$$

したがって，

$$1.002^5 = (1+0.002)^5$$
$$= f(0.002) \quad \text{[D]}$$
$$\fallingdotseq 1 + 5\times 0.002$$
$$= \mathbf{1.01}$$

[C] 1 次の近似式
$x \fallingdotseq 0$ のとき，
$f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)x$

[D] 上で求めた式に $x = 0.002$ を代入する。

3 [正解] カ：1，キ：3，ク：②

[解説]

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\frac{1}{3}$$

よって，$x\fallingdotseq 0$ のとき，

$$f(x)\fallingdotseq \boldsymbol{1+\frac{1}{3}x}$$ [E]

[E]　1次の近似式
$x\fallingdotseq 0$ のとき，
$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

したがって

$$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{125+3}$$

$$=\sqrt[3]{5^3\left(1+\frac{3}{5^3}\right)}$$

$$=5\sqrt[3]{1+\frac{3}{5^3}}$$

$$=5f\left(\frac{3}{5^3}\right)$$ [F]

$$\fallingdotseq 5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5^3}\right)$$

$$=5+\frac{1}{5^2}$$

$$=\boldsymbol{5.04}$$

[F]　$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ より $x=\frac{3}{5^3}$ を代入する。